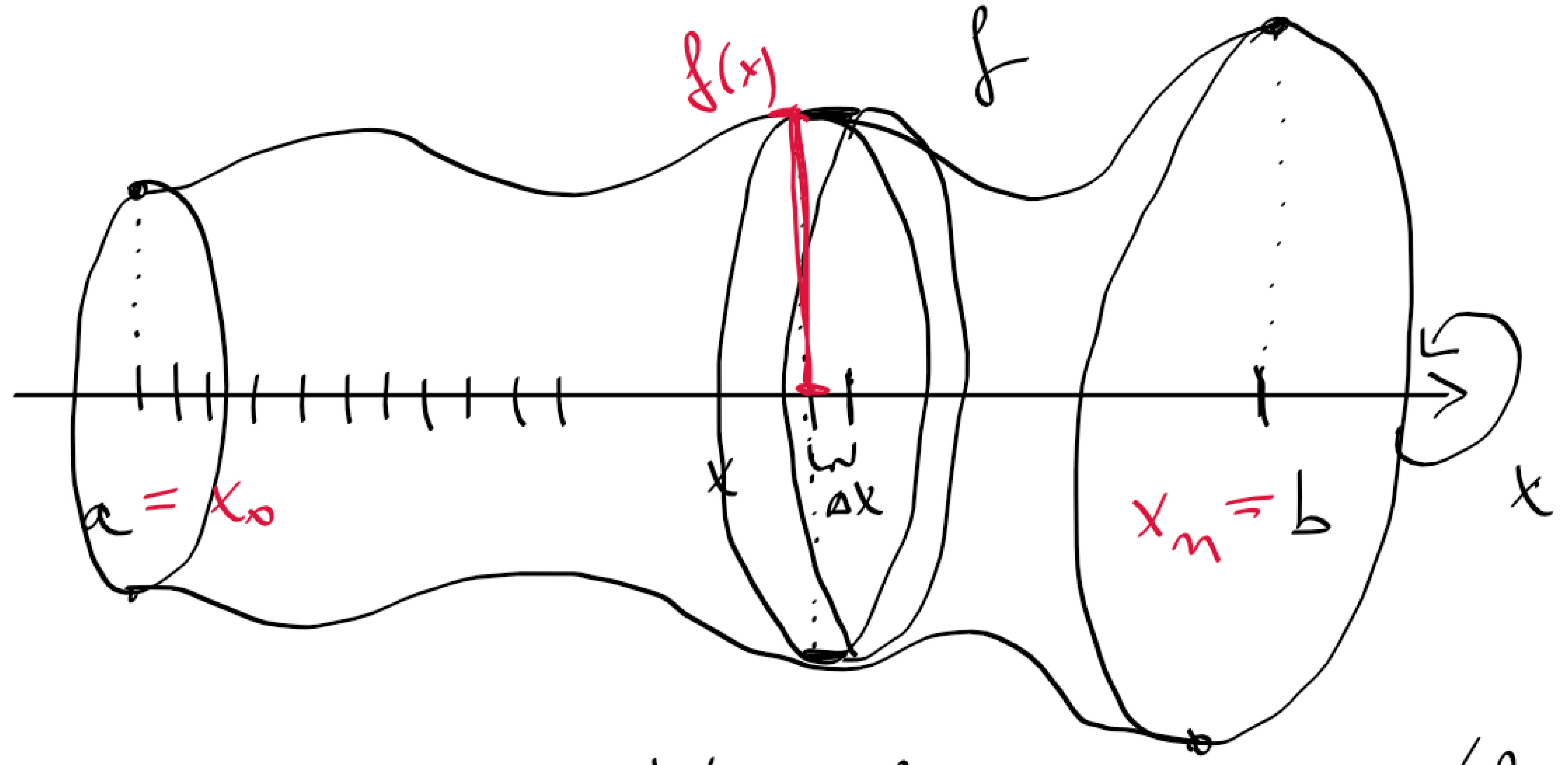
OBJEMY TĚLES



Chceme spočítat V… objem rotačního tělesa, jehož povrch vznikne rotací grafu fce f kolem osy x.

ΔV… příslušný intervalu $[x, x+\Delta x]$.

$$\Delta V \approx \underbrace{\pi f^2(x)}_{\text{obsah podstavy}} \cdot \Delta x$$

$$V = \sum \Delta V \approx \sum_{i=0}^{n} \pi f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

uvažujeme body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

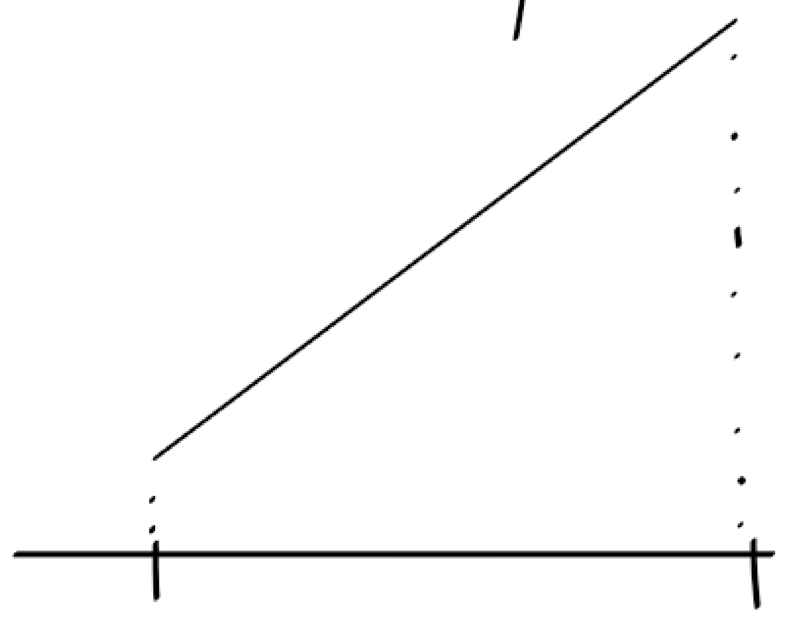
Když přejdeme k limitě „$\nu(D) \to 0$" (zjemňujeme dělení).

$$\sum_{i=0}^{n} \pi f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x) \cdot dx}$$

$f(x) = \alpha x + \beta$

Příklad: kužel.

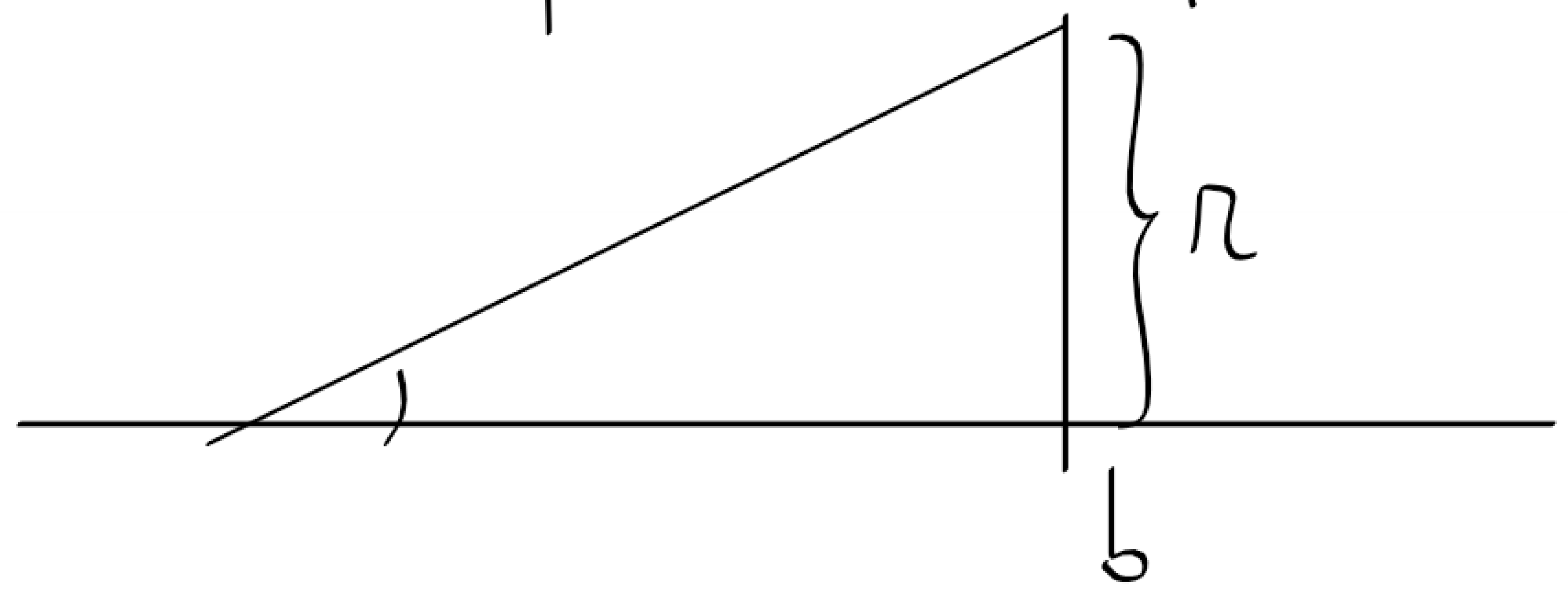


nejjednodušší: $\alpha > 0$, $\beta = 0$, $a = 0$, $b > 0$.

$$V = \int_0^b \pi \cdot f^2(x)\,dx = \pi \int_0^b \alpha^2 x^2\,dx =$$

$$= \pi \cdot \alpha^2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \pi\,\alpha^2 \frac{b^3}{3} =$$

Kužel o poloměru podstavy r, výšce b.



$$\alpha = \frac{r}{b}$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{b^2} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot b.$$

Příklad: V_{koule}: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [1,1]$

$$V = \int_{-1}^{1} \pi f^2(x)\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx =$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi.$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx \;\ldots\; = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Krychle o straně a má objem a^3

$2a$ $\qquad$ $8a^3$

Budiž K krychle
S_K … obsah jejího povrch

$2K$ má obsah povrchu $4S_K$.

Mějme libovolné těleso $T \subseteq \mathbb{R}^3$ o povrchu S.

Pak $a \cdot T$ má povrch $a^2 S$ $(a>0)$.

(aplikace zobrazení $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.)

---

koule K_0 poloměr 1 má objem $\frac{4}{3}\pi$.

Pak $r \cdot K$ (má poloměr r) má objem $r^3 \cdot \frac{4}{3}\pi$.

Jedinec o objemu V, obsahu S, výšce v.

Nafoukneme na $2V$.

nafukovali jsme délky faktorem r

a platí: $r^3 = 2$

$r = \sqrt[3]{2}$

$$v_N = \sqrt[3]{2}\, v$$

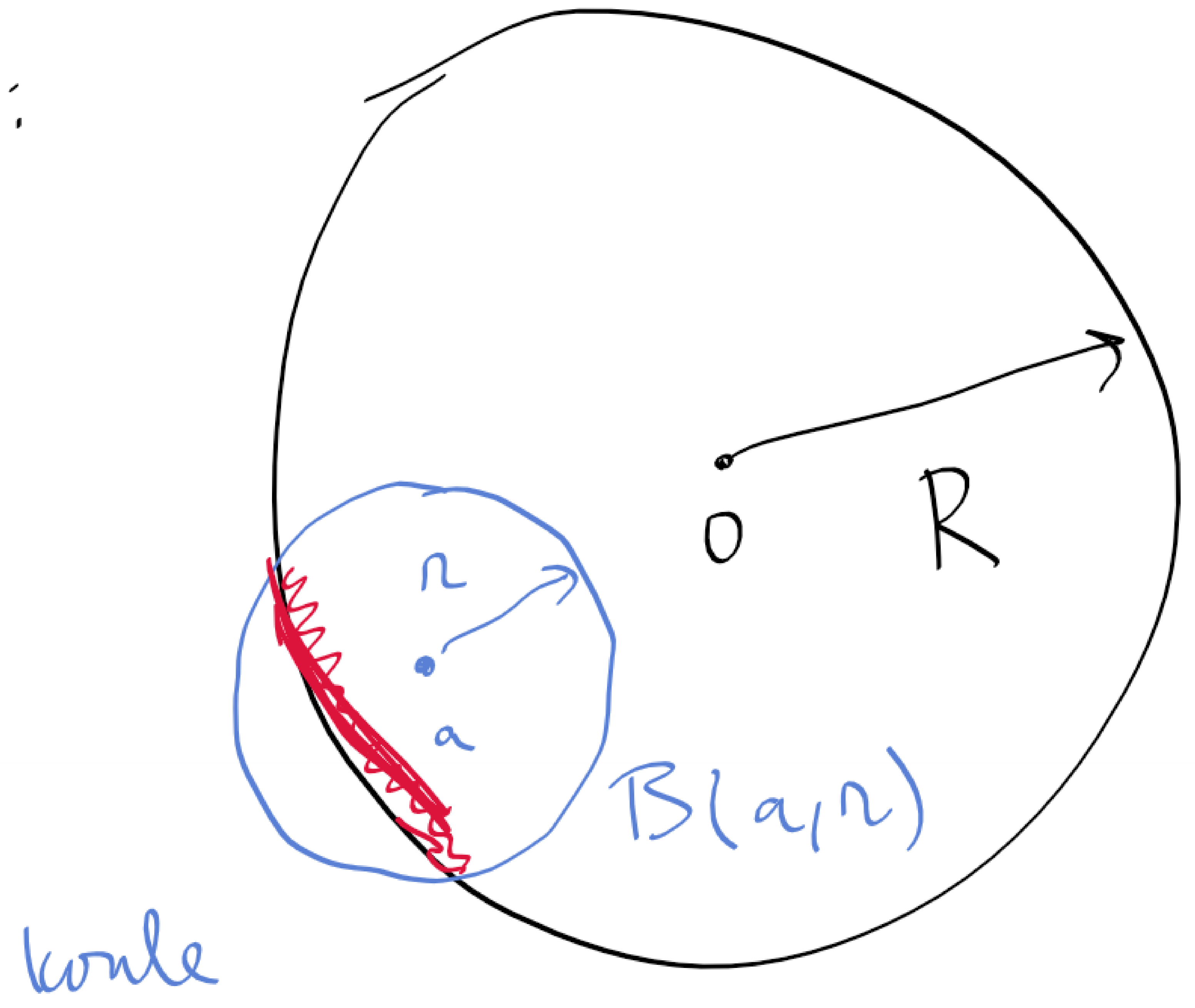
$$S_N = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 S = 2^{\frac{2}{3}} S.$$

$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad S_{kruhu} = \pi r^2$

$\text{Obvod kruhu} = 2\pi r$ $\quad S_{koule} = 4\pi r^2$

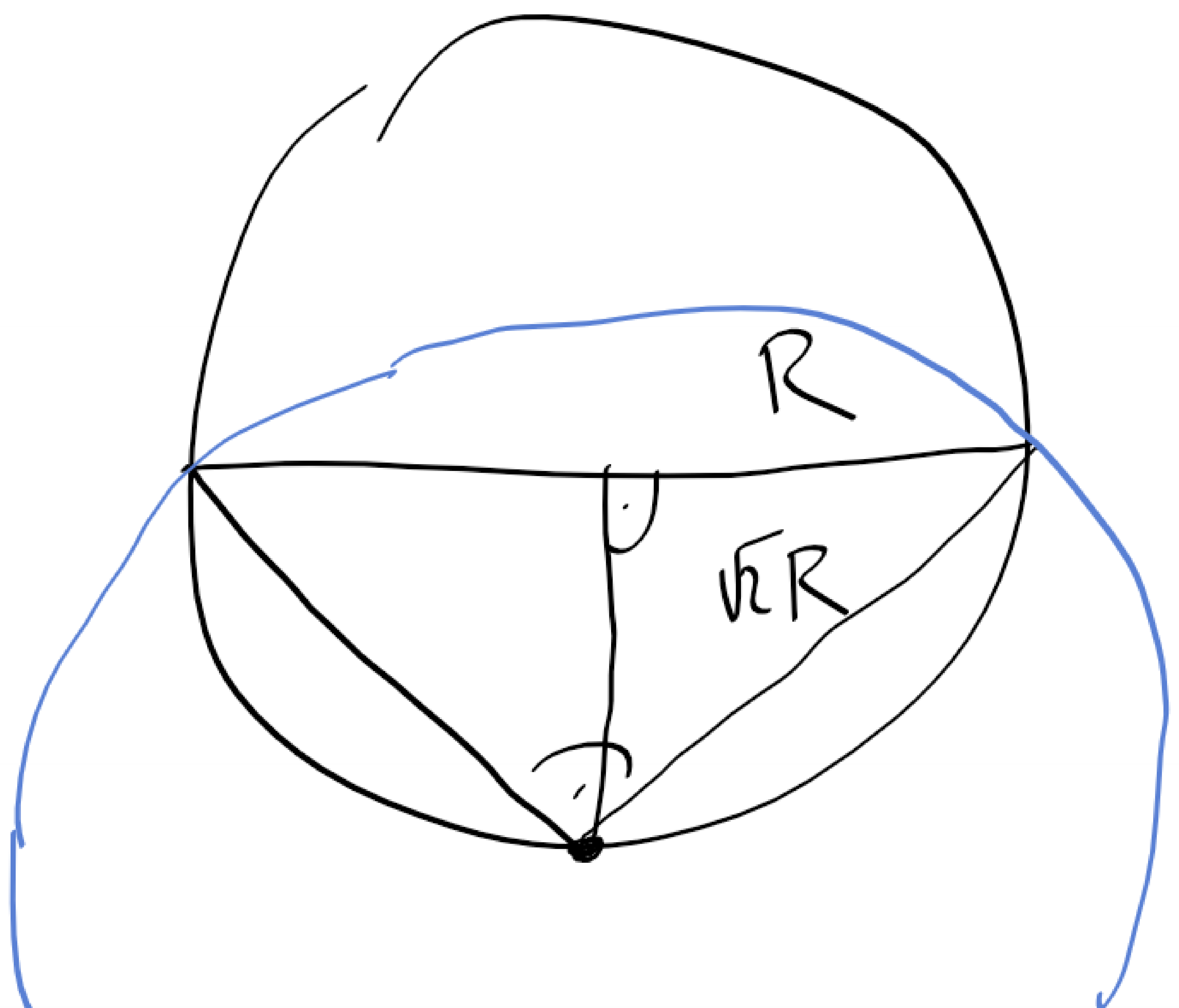
Poznámka:

koule



Označme $S(O,R)$ povrch velké koule.

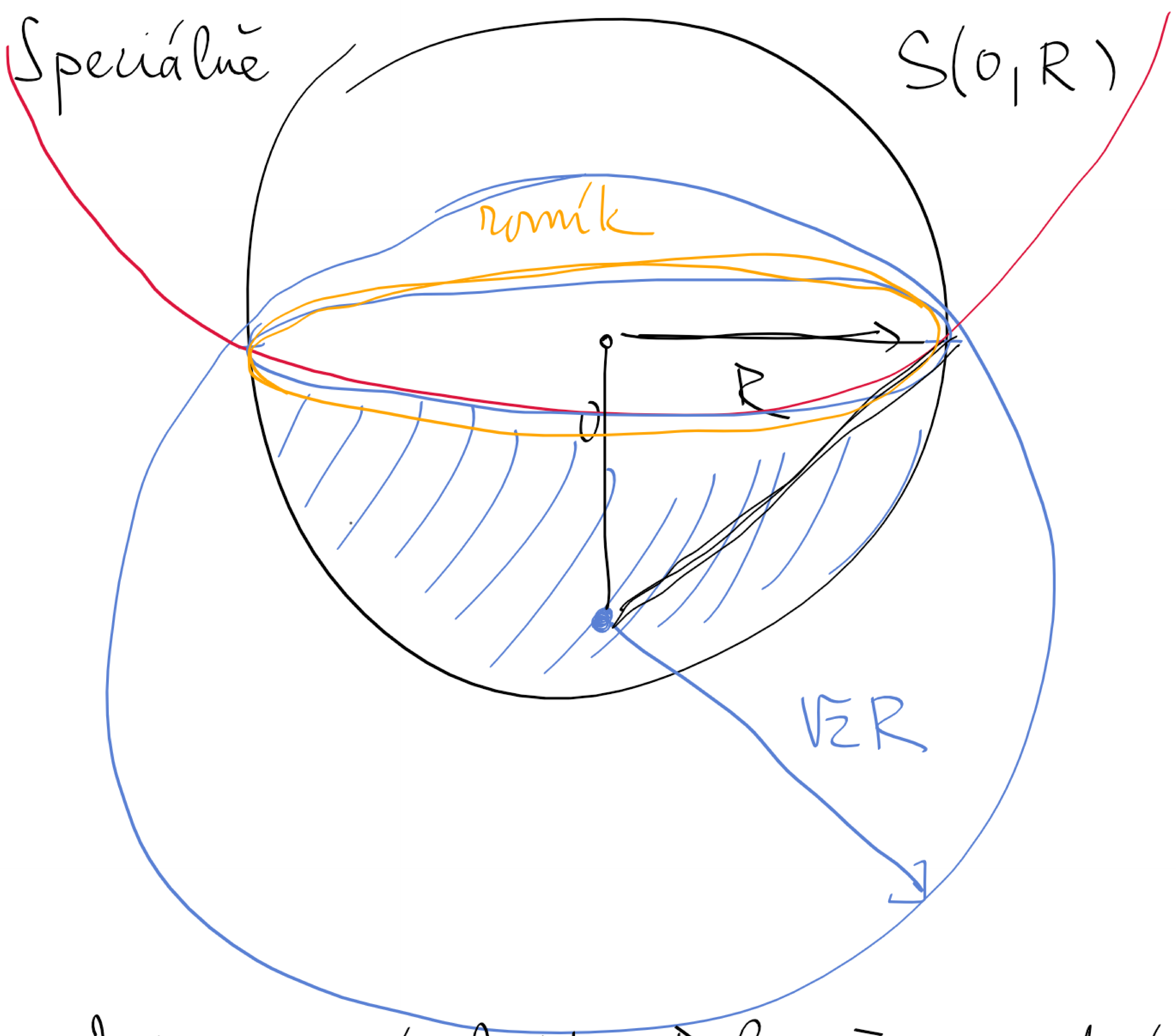
Platí, že obsah $S(O,R) \cap B(a,r) = \underline{\underline{\pi \cdot r^2}}$



Obsah dolní polosféry:

$\pi \cdot (\sqrt{2}R)^2 = 2\pi R^2$

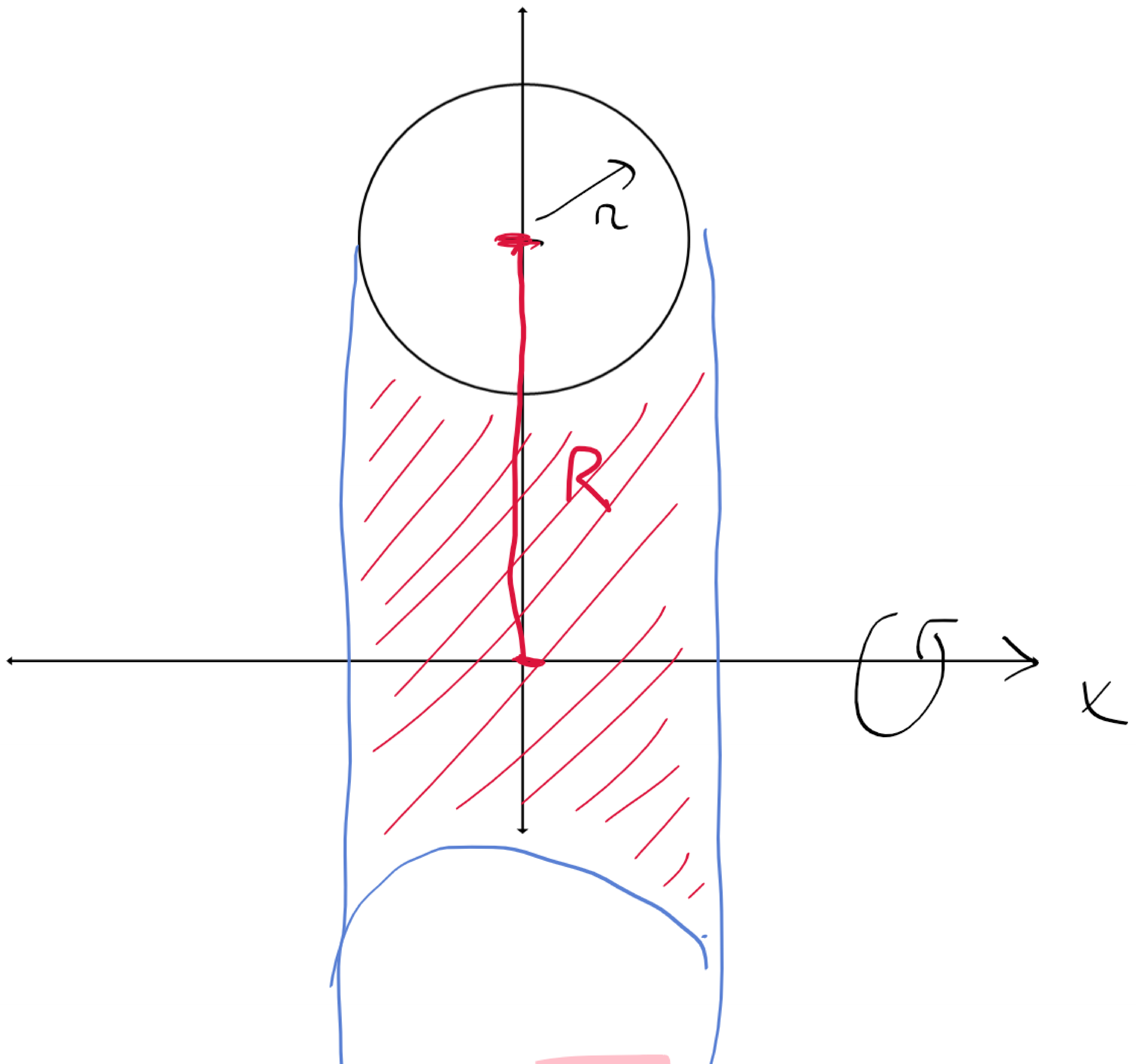
Speciálně



Jaký musí být poloměr modré a červené bubliny?

Pak povrch $4\pi R^2$ je jasný.

PAPPOVY VĚTY (Pappos z Alexandrie 290–350)



Pappova věta $\Rightarrow$ $\boxed{V} = \pi \cdot r^2 \cdot 2\pi \cdot R = \boxed{2\pi^2 r^2 R}$

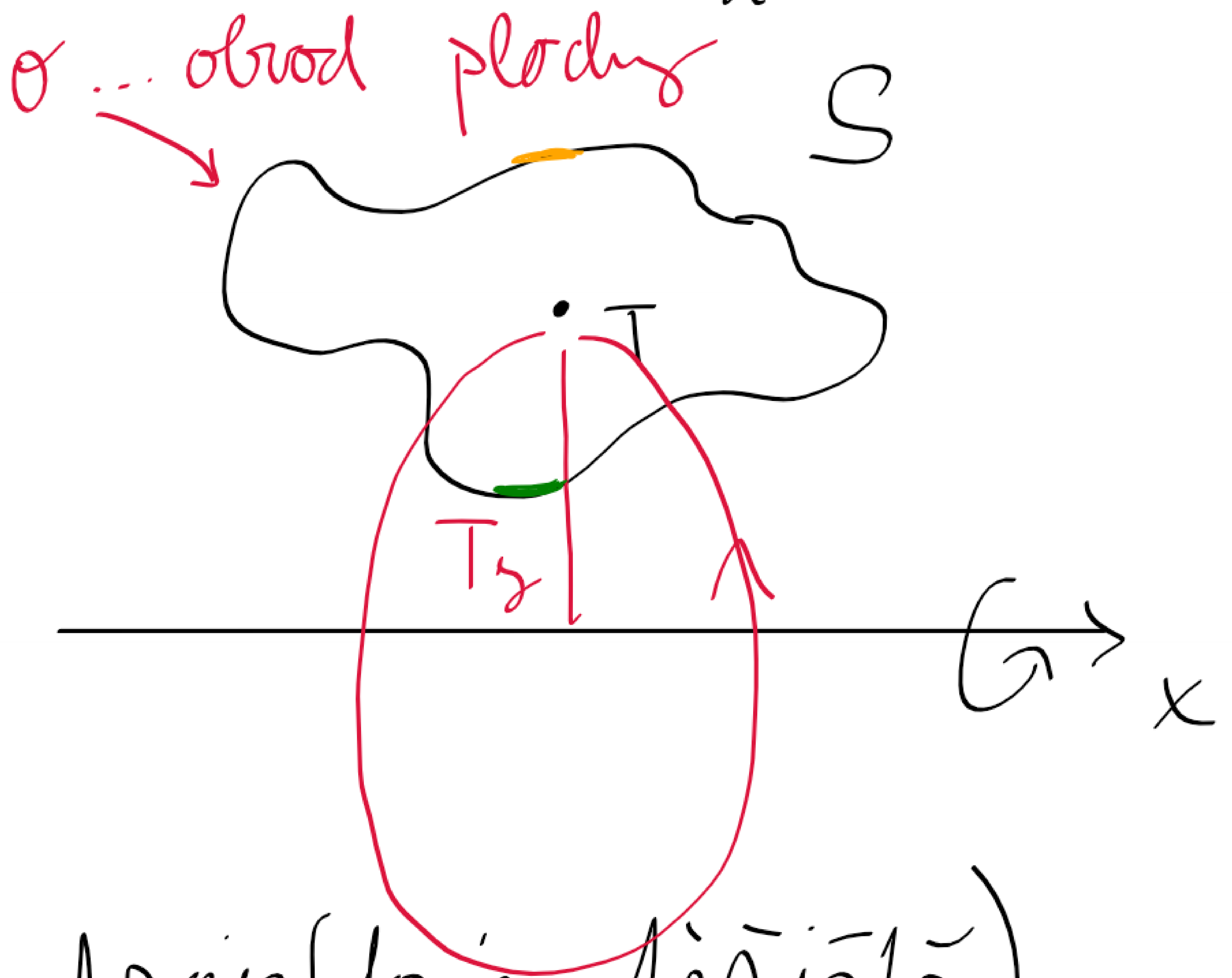
$$\boxed{P_{\text{rot. tělesa}} = 2\pi \cdot r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R}$$

Stačí odečíst „nářez od celého kola".

Cv. na vypočet $V = \pi \int_a^b f^2$

Pappova věta:

$T = (T_x, T_y)$



$V = S \cdot$ (délka trajektorie těžiště)

$$\boxed{V = S \cdot 2\pi T_y}$$

$P_{\text{rot. tělesa}} = \sigma \cdot$ (délka traj. těžiště)

$= \sigma \cdot 2\pi T_y$

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx}_{=\,I} = \left| \begin{array}{l} x = 2t \\ dx = 2dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)\,2dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cdot\cos t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)\,dt =$$

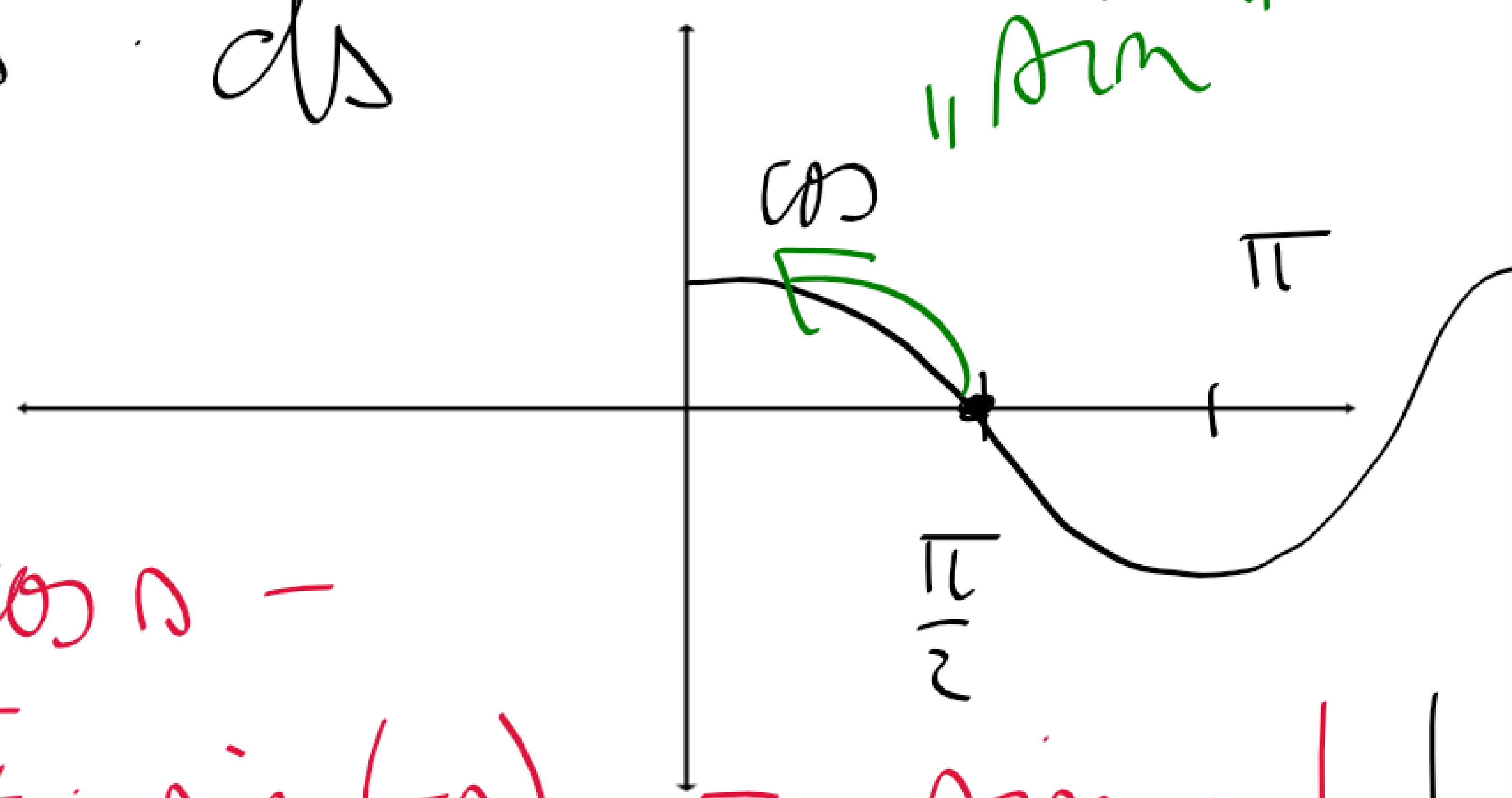
$$= 2\left(\ln 2\cdot\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt\right) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - s \\ dt = -ds \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/4 \\ \hline s & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \end{array} \right|$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\cdot(-ds) =$$

$$= +\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin s\cdot ds$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos s - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin(-s) = \sin s$$



$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin s\,ds$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt$$

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Víme: $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi \ln 2}{2}$

S pomocí tohoto výsledku spočtěte:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$

(b) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx$

(c) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

souvislost přes P.P.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \int_0^{\pi/2} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x}\,dx$

$\ln(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}$

$y = \ln \sin x \Rightarrow e^y = \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$dy = \frac{\cos}{\sin x}\,dx \qquad x = \arcsin e^y$

x	0	$\pi/2$
y	$-\infty$	0

$$= \int_{-\infty}^{0} \arcsin e^y \cdot dy$$

NIKAM NEVEDE

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$$\Big[x \cdot \ln(\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \ln(\sin x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \ln \sin \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to 0_+} x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$= 0 - 0 + \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx =$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin t)}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin t)}{\cancel{\cos t}} \cdot \cancel{\cos t}\,dt = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$$

(b) s pomocí (c) snadno z P.P.